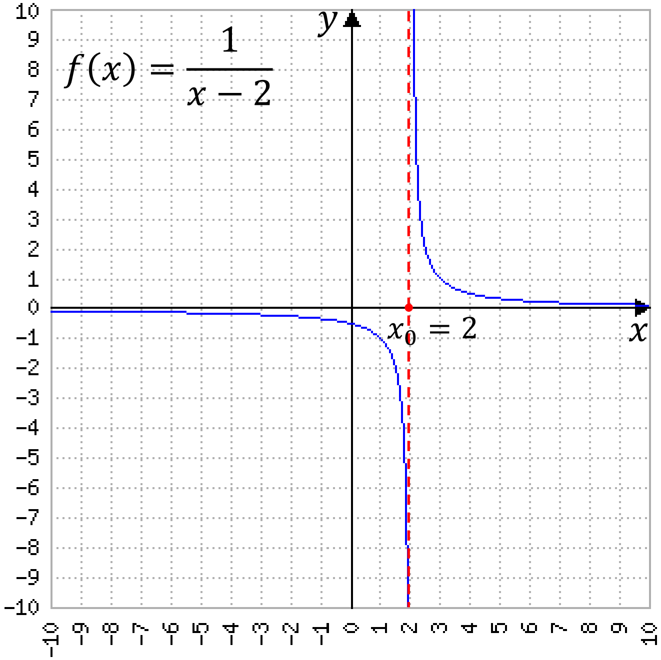
Polstellen

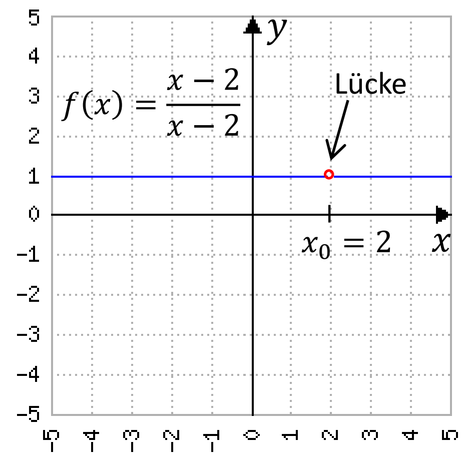
- Polstellen können an den Nullstellen des Nenners auftreten, müssen aber nicht!
- $f(x)$ hat bei x_0 eine Polstelle, wenn x_0 eine Nullstelle des Nenners ist und der Zähler nicht gleichzeitig 0 oder ∞ wird.
- Es gibt Polstellen mit bzw. ohne Vorzeichenwechsel (VZW).



Lücken statt Polstellen

Der „pathologische“ Fall tritt dann ein, wenn bei x_0 eine Nullstelle des Nenners vorliegt aber auch der Zähler Null wird. Die Funktion

$f(x) = \frac{x-2}{x-2}$ hat bei $x_0 = 2$ eine Nullstelle des Nenners, aber auch des Zählers. Damit wäre $f(2) = \frac{0}{0}$, aber dies ist nicht definiert!



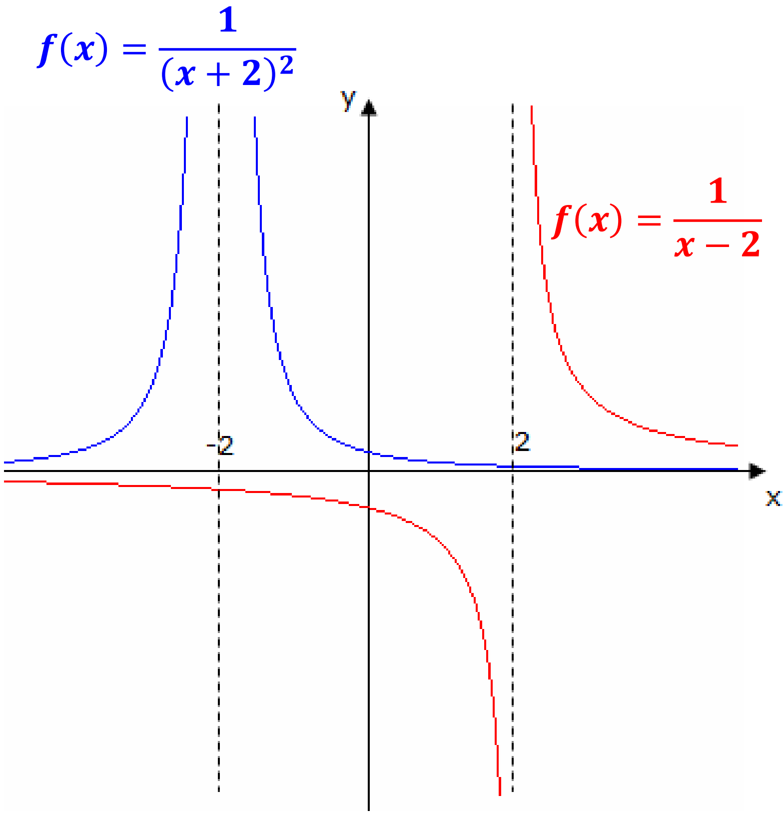
$f(x)$ hat bei $x_0 = 2$ eine Definitionslücke aber keine Polstelle!

Beachte: Schließe diejenigen x_0 aus den Kandidaten für Polstellen aus, bei denen der Zähler 0 oder ∞ wird!

Polstellen - Konstruktion

Wenn $f(x)$ bei $x = a$ eine Polstelle haben soll, so brauchen Sie einen Nenner der Form $\frac{1}{(x-a)^k}$.

Für gerade k ergibt sich eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, ungerade k liefern eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.



Vorzeichenuntersuchung

Annäherung von links:

$$x < x_0\colon \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Annäherung von rechts:

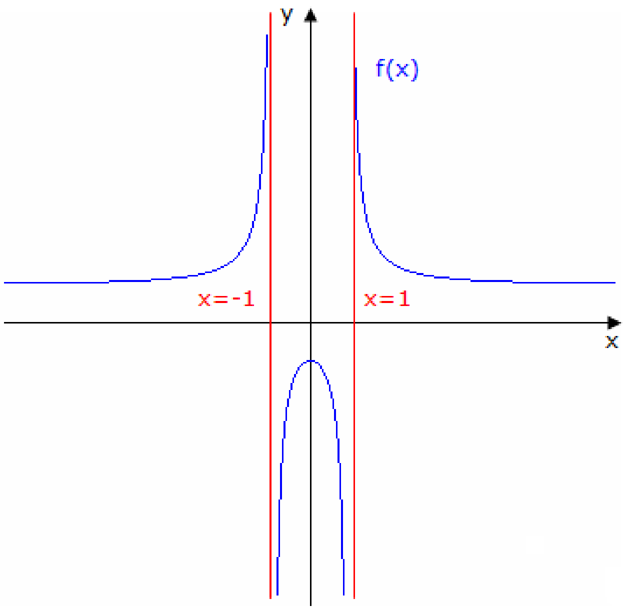
$$x > x_0\colon \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Man stellt also das Vorzeichen vor und nach der Polstelle fest, indem man einen etwas kleineren und einen etwas größeren x-Wert als x_0 einsetzt.

In der Regel kann jedoch der GTR verwendet werden!

Rechenbeispiel

Untersuche $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ auf Polstellen.



Lösung:

Nullstellen des Nenners:

$x_0 = 1; x_1 = -1$

In beiden Fällen wird der Zähler nicht

0 oder ∞, somit handelt es sich um Polstellen.

Rechenbeispiel

Vorzeichenuntersuchung der Polstelle bei $x_0 = 1$

Annäherung von links:

$x < 1$: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$

für x „nahe“ 1 und $x < 1$ (z.B. $x = 0{,}9$) wird der Nenner negativ!

Annäherung von rechts:

$x > 1$: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

für x „nahe“ 1 und $x > 1$ (z.B. $x = 1{,}1$) sind Zähler und Nenner positiv!

Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 1$.
Analog: Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -1$.

Wahlteil 2009 Analysis I 1 a)

Die Aufgabe wird ausschnittsweise wiedergegeben.

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 6 - \frac{100}{(x^2-16)^2}$.

Geben Sie sämtliche Asymptoten des Schaubilds von f an.

Geben Sie die Nullstellen von f an.

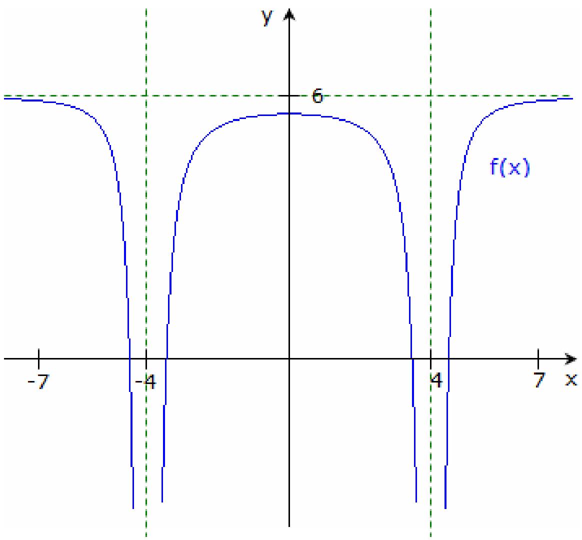
Skizzieren Sie das Schaubild von f samt Asymptoten für $-7 \leq x \leq 7$.

Weisen Sie nach, dass f genau eine Extremstelle besitzt.

(6 VP)

Lösung

Asymptoten: Wegen $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 6$ ist die Gerade $y = 6$ eine waagrechte Asymptote von f.



$$f(x) = 6 - \frac{100}{(x^2 - 16)^2}$$

Polstellen: Die Nullstellen des Nenners sind die Polstellen von f.
(Beachte: An diesen Stellen wird der Zähler nicht gleichzeitig 0!)
Die Nullstellen des Nenners sind:
$x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.

Nullstellen: Über 2ND CALC ZERO berechnen Sie die Nullstellen mit dem GTR: $x_1 = -4{,}48$; $x_2 = -3{,}45$; $x_3 = 3{,}45$; $x_4 = 4{,}48$.

Lösung

Extremstellen: Zu $f(x) = 6 - \frac{100}{(x^2-16)^2} = 6 - 100 \cdot (x^2 - 16)^{-2}$ setze $f'(x) = 0$. Unter Beachtung der Kettenregel folgt
$f'(x) = 2x \cdot 200(x^2 - 16)^{-3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$

Wir bilden noch die zweite Ableitung, um festzustellen, ob es sich an der Stelle $x = 0$ wirklich um einen Extrempunkt handelt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot 200(x^2 - 16)^{-3} + 2x^2 \cdot (-600(x^2 - 16)^{-4}) \\ &= 400(x^2 - 16)^{-3} - 1200x^2(x^2 - 16)^{-4} \end{aligned}$$

Wegen $f''(x) < 0$ (GTR) haben wir bei $x = 0$ einen Hochpunkt und dies ist die einzige Extremstelle von f.